



TITLE:

周期磁場中での超流動 $^3\text{He}$ の磁化  
の応答(カオスとその周辺,研究会報  
告)

AUTHOR(S):

山口, 喜博; 片山, 硬; 古河, 文生; 石井, 力

---

CITATION:

山口, 喜博 ...[et al]. 周期磁場中での超流動 $^3\text{He}$ の磁化の応答(カオスと  
その周辺,研究会報告). 物性研究 1982, 39(2): B26-B29

ISSUE DATE:

1982-11-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/90785>

RIGHT:

## 周期磁場中での超流動 $^3\text{He}$ の磁化の応答

東理大・理, 日本自動車研究所\*

山口喜博, 片山 碩\*, 古川文生, 石井 力

周期外力を受けた少数自由度系が, 様々な応答をする事が多く報告されている<sup>1)</sup>。例えば, ブラッセレーター系, ジョセフソン接合, 非調和振動子, ローレンツ系等々である。我々は, 超流動  $^3\text{He}$ -A, B の非線形パラレル・リングングの状況で, 周期外力としての周期磁場を加えた場合の系の応答について調べた<sup>2)</sup>。この系の特徴として, 次の2点があげられる。①  $^3\text{He}$ -A, B のスピン  $S$ , オーダーパラメーターの動的特性は, Leggett-Takagi ( $L$ - $T$ ) 方程式によって記述される。これは,  $S$  とオーダーパラメーターの位相  $\theta$  に対する非線形方程式である。また, 磁場の影響も明確である。②  $L$ - $T$  方程式を  $\theta$  に対する2階の微分方程式としてみた時,  $\theta$  の値によって“負性抵抗”が現れる。

適当にスケールされた  $L$ - $T$  方程式を示そう<sup>3)</sup>。A 相に対しては,

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_L} \sin 2\theta \quad (1\cdot a)$$

$$\dot{\theta} = -\omega_L \sin \omega_d t + \omega_L S + \frac{1}{2} \alpha_A \sin 2\theta \quad (1\cdot b)$$

B 相に対しては,

$$\dot{S} = \frac{4}{15} \frac{1}{\omega_L} \sin \theta (1 + 4 \cos \theta) \quad (2\cdot a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\omega_L \sin \omega_d t + \omega_L S \\ & + \frac{4}{15} \alpha_B \sin \theta (1 + 4 \cos \theta) \end{aligned} \quad (2\cdot b)$$

ここで,  $\omega_L \sin \omega_d t$  が周期磁場を表わす。 $\theta$ ,  $S$  が小さい時,  $\omega_d = 1$  で共鳴が生じる。 $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$  がダンピングの強さであり, 実験より得られた値は,  $\alpha_A = 0.1$  及び  $\alpha_B = 0.25$  である。これらの値を用いて  $L$ - $T$  方程式を数値的に積分した。パワースペクトル, 分岐図により,  $S$ ,  $\theta$  の様々な応

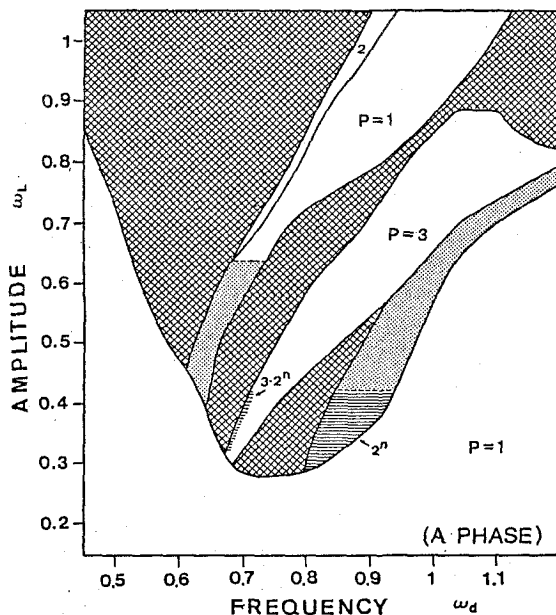


図1 A相に対する相図。数字は周期を表わす。斜線領域は、カオス、点々の領域は、準周期的応答。

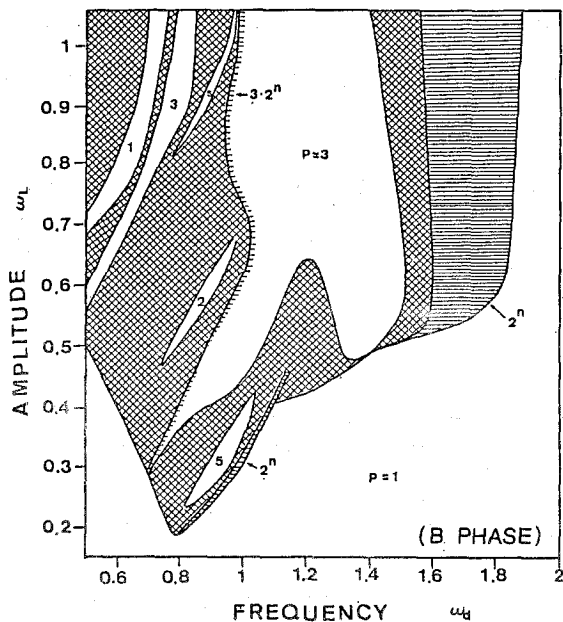


図2 B相に対する相図

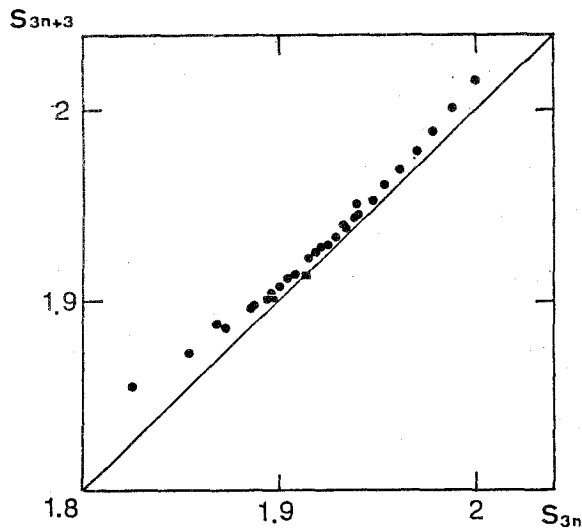


図3 Intermittent カオスにおける tangent 分岐。(  $\omega_L = 0.4$   $\omega_d = 0.752342$  )  $S_n = 1.9$  付近の拡大図。  
黒い四角が3周期の不動点。

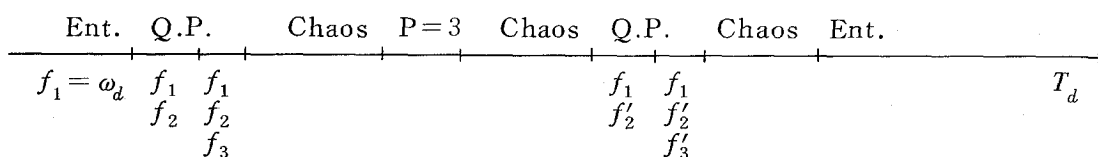
周期磁場中での超流動  $^3\text{He}$  の磁化の応答とカオスに到るルートについて調べた。我々の得た結果は、相図 ( $\omega_d$ ,  $\omega_L$ ) にまとめられている。(図1はA相, 図2はB相) ここでは、カオスに到るいくつかのルートについて述べる。

1)  $2^n$  分岐。この分岐は、A相では  $0.29 \lesssim \omega_d \lesssim 0.41$  の近く、B相では、広い領域で見い出される。分岐パラメーターとしては、周期  $T_d = 2\pi/\omega_d$  をとる。すなわち、 $\omega_d$  を減少させてゆくことに相当する。 $2^n$  分岐に伴うユニバーサル・コンスタント  $\alpha$ 、 $\delta$  及び  $\mu$  の値を、A相では  $\omega_L = 0.4$ 、B相では  $\omega_L = 0.8$  の場合について計算した。Scaling 因子  $\alpha$  は、A相では  $\alpha \simeq 2.45$  B相では  $\alpha \simeq 2.56$  を得た。また、Convergence rate  $\delta$  は、A相では、 $\delta = 4.76$  B相では  $\delta = 4.70$  である。次にパワースペクトルの強さの比  $\mu$  を、16周期の8周期の平均のピーク値と16周期の平均のピーク値より計算して、A相では  $\mu = 4.45 \sim 4.54$  B相では  $\mu = 4.26 \sim 4.49$  を得た。我々の結果は、理論値<sup>4)</sup>  $\alpha = 2.502 \dots$ 、 $\delta = 4.669 \dots$ 、及び  $\mu = 4.57 \dots$  に近いと言えよう。

2) Intermittent chaos<sup>5)</sup>。このカオスは、相図の中で、大きな島を形成している  $P=3$ 、また  $P=5$  の右側で見い出された。すなわち、分岐パラメーター  $T_d$  を下げると、Intermittent chaos に到る一方、分岐パラメーターを上げると、 $3 \times 2^n$  または  $5 \times 2^n$  分岐をして、

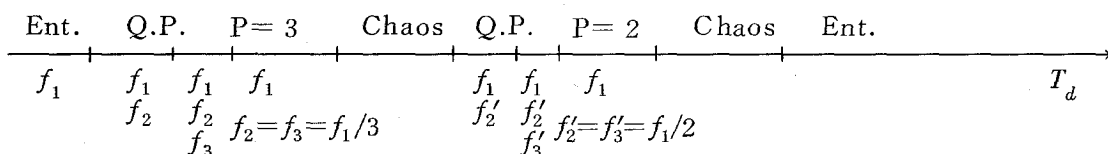
カオス化する。この様子は、ロジスティック写像の場合のカオス中における、奇数周期の窓の現われ方と対応している。Intermittent Chaos は、tangent 分岐を経て出現する。これは、1次元写像からも明らかである。(図3)

3) 準周期的応答。このパラメーター領域では、A相のみで観測される。準周期的応答の領域では、外部磁場の振動数  $\omega_d$  (以下  $f_1$  と書く。)の他に、Incommensurate な振動数  $f_2$  または  $f_3$  が現われる。特に  $\omega_L = 0.5$  では、次の応答の変化が見い出された。(注、以下 Entainment を Ent. と省略する。)



すなわち、カオスに到る前に、3つの Incommensurate な振動数が現われる。このルートは、“小数個のモードが励起された後にストレンジ・アトラクターが現われる。”という Ruelle-Takens 流<sup>6)</sup>の picture で説明される。

次に  $\omega_L = 0.6$  の場合の応答の変化を示す。



ここでは、2つの Incommensurate なピークが、徐々に近づき  $f_2 = f_3 = \omega_d/3$  または  $\omega_d/2$  と、周期解に引きこまれる Phase Locking 現象が見られる。このような、準周期的応答に対する明解な理論は、まだ完成されていない。

我々は、外部磁場の振幅を  $\omega_L \sim 1$  程度に限ったが、 $\omega_L$  を更に大きくすると、拡散的なモードやランニングモード等の応答が現われる。これらの応答は非常に複雑であり、解明は今後の課題となろう。

最後に、実験の方法について述べる。周期磁場をかけつつ、 $S$  の変化を SQUID で観測するのが理想的である。しかし、現在はまだ困難であると考えられる。よってここでは、サンプリングパルスによる方法を示す。周期磁場をかけ、十分な時間を経た後、パルスをかけて  $S$  を測る。サンプリングパルスの影響が残ると考えられるので、一端磁場を切り、再度磁場をかけ、同じ事を行う。ここで注意すべきは、周期磁場が同一位相の時にパルスをかけるという点である。こうすれば、サンプルされた  $S$  の値を  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) とすると、 $P$  周期ならば  $P$  個

Successive Higher-harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback  
 の異った値を得るはずである。これより分岐図を得ることができる。同一位相でない場合でも、  
 $[S_i, S_{i+1}]$  の図を作れば、周期解ならば Limit cycle を、Chaos 解であるならばストレンジ・アトラクターを形成するはずである。

## References

- 1) 最近の総合的なレポートとして、K. Tomita, Phys. Report **86** (1982) 113.
- 2) Y. Yamaguchi, T. Katayama and C. Ishii, to be published in Phys. Lett. A: T. Katayama, Y. Yamaguchi, F. Furukawa and C. Ishii, submitted to Phys. Rev. B (Rapid Commun.).
- 3) L-T方程式の詳しい説明として、次の文献を参照して下さい。  
 A. J. Leggett and S. Takagi, Ann. Phys. (NY) **106** (1977) 79.  
 T. Katayama, K. Ooiwa and C. Ishii, J. Low Temp. Phys. **40** (1980) 1.
- 4) M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. **19** (1978) 25.
- 5) P. Manneville and Y. Pomeau, Phys. Lett. **75A** (1979) 1.  
 Y. Pomeau and P. Manneville, Comm. Math. Phys. **74** (1980) 189.
- 6) D. Ruelle and F. Takens, Comm. Math. Phys. **20** (1971) 167.

## Successive Higher-harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback

京大・理 池田研介・近藤啓二  
 山口大・医短 秋元興一

次のクラスの遅延微分方程式

$$dx(t)/dt = -x(t) + f(\mu; x(t-t_R)), \quad (1)$$

で記述される系で普遍的に見出される新しい型の逐次分岐現象を報告する。系(1)の例は非線形光学、音響系、制御理論、生理学、生態学等々広汎な分野で見出されている。

筆者達が扱ってきた非線形光学（光双安定系）の例では、<sup>1)</sup>

$$f(\mu; x) = \pi\mu(1 + 2B\cos(X-X_0)), \quad (2)$$

であるので、まづこの特殊な場合に対する結果をのべる。 $\mu$ の増大と共に  $\mu > \mu_A$  で定常解が Hopf 分岐後、周期  $T_0 (\approx 2t_R)$  の矩形波発振がおきる。この解は  $\mu = \mu_F$  で逐次周期倍分